Ziurgabetasun printzipioa eta Schrodingerren ekuazioa

Mikel Agirre

BCAM

June 29, 2016

Ziurgabetasun printzipioa

Ziurgabetasun printzipioa

- Zer da ziurgabetasun printzipioa?

Ziurgabetasun printzipioa

- Zer da ziurgabetasun printzipioa?

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ziurgabetasun printzipioa

- Zer da ziurgabetasun printzipioa?

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Matematikoki ere idatz dezakegu

Ziurgabetasun printzipioa

- Zer da ziurgabetasun printzipioa?

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Matematikoki ere idatz dezakegu

Theorem

Izan bedi $f \in L^2$ non xf eta f' ere karratu integragarriak diren. Orduan

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |xf(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \geq \frac{\|f\|_2^2}{4\pi}$$

Ziurgabetasun printzipioa

- Ziurgabetasun printzipioaren bertsio ezberdinak daude

Ziurgabetasun printzipioa

- Ziurgabetasun printzipioaren bertsio ezberdinak daude

Theorem (Hardy)

Baldin $f(x) = \mathcal{O}(e^{-\frac{x^2}{\beta^2}})$, $\hat{f}(\xi) = \mathcal{O}(e^{-\frac{4\xi^2}{\alpha^2}})$ *eta* $\alpha\beta < 4$, *orduan* $f \equiv 0$ *eta* $\alpha\beta = 4$ *bada orduan* $f(x) = ce^{-\frac{x^2}{\beta^2}}$

Ziurgabetasun printzipioa

- Ziurgabetasun printzipioaren bertsio ezberdinak daude

Theorem (Hardy)

Baldin $f(x) = \mathcal{O}(e^{-\frac{x^2}{\beta^2}})$, $\hat{f}(\xi) = \mathcal{O}(e^{-\frac{4\xi^2}{\alpha^2}})$ *eta* $\alpha\beta < 4$, *orduan* $f \equiv 0$ *eta* $\alpha\beta = 4$ *bada orduan* $f(x) = ce^{-\frac{x^2}{\beta^2}}$

Theorem

Baldin $e^{A_1|\cdot|^2} f \in L^p$ *eta* $e^{A_2|\cdot|^2} \hat{f} \in L^q$, $p, q \in [1, +\infty]$ *eta gutxienez hoietako bat finitua bada* $A_1 A_2 \geq 1/4$ *izanik, orduan* $f \equiv 0$

Ziurgabetasun printzipioa

- Ziurgabetasun printzipioaren bertsio ezberdinak daude

Theorem (Hardy)

Baldin $f(x) = \mathcal{O}(e^{-\frac{x^2}{\beta^2}})$, $\hat{f}(\xi) = \mathcal{O}(e^{-\frac{4\xi^2}{\alpha^2}})$ *eta* $\alpha\beta < 4$, *orduan* $f \equiv 0$ *eta* $\alpha\beta = 4$ *bada orduan* $f(x) = ce^{-\frac{x^2}{\beta^2}}$

Theorem

Baldin $e^{A_1|\cdot|^2} f \in L^p$ *eta* $e^{A_2|\cdot|^2} \hat{f} \in L^q$, $p, q \in [1, +\infty]$ *eta gutxienez hoietako bat finitua bada* $A_1 A_2 \geq 1/4$ *izanik, orduan* $f \equiv 0$

Theorem

Baldin $f \in L^1$ *eta* $\int \int |f||\hat{f}|e^{|x \cdot \xi|} dx d\xi < \infty$ *orduan* $f \equiv 0$

Schrodingerren ekuazioa

- Schrodingerren ekuazioaren adierazpen orokorra

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = \hat{H}\Psi(r,t)$$

non $\hat{H}$ eragile Hamiltoniarra den, zeinek uhin funtzioaren energia adierazten duen.

Schrodingerren ekuazioa

- Schrodingerren ekuazioaren adierazpen orokorra

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = \hat{H}\Psi(r,t)$$

  non $\hat{H}$ eragile Hamiltoniarra den, zeinek uhin funtzioaren energia adierazten duen.

- Guk partikula askearekin lan egingo dugu, zehazki, ondoko problema honekin

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Schrodingerren ekuazioa

- Schrodingerren ekuazioaren adierazpen orokorra

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = \hat{H}\Psi(r,t)$$

  non $\hat{H}$ eragile Hamiltoniarra den, zeinek uhin funtzioaren energia adierazten duen.
- Guk partikula askearekin lan egingo dugu, zehazki, ondoko problema honekin

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

- Goiko problema modu erraz batean ebatz daiteke Fourier-en teoria erabiliz eta honela idatz dezakegu bere soluzioa:

$$u(x,t) = (2it)^{-1/2} e^{i\frac{x^2}{4t}} (e^{i\frac{|\cdot|^2}{4t}} u_0)\hat{}\,(\frac{x}{2t}) = (2it)^{-1/2} \int e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$$

- Goian idatzi dugun ekuazioaren soluzioa hartuz, lehen aipatutako Hardy-ren emaitza berridatz dezakegu honako modu honetan:

Schrodingerren ekuazioa

- Goian idatzi dugun ekuazioaren soluzioa hartuz, lehen aipatutako Hardy-ren emaitza berridatz dezakegu honako modu honetan:

Theorem (Hardy)

Baldin $u_0(x) = \mathcal{O}(e^{-\frac{x^2}{\beta^2}})$, $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x) = \mathcal{O}(e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}})$, $t > 0$ *eta* $\alpha\beta < 4t$, *orduan* $u \equiv 0$ *eta* $\alpha\beta = 4t$ *bada orduan* u *soluzioa izango da* $\omega e^{-(\frac{1}{\beta^2}+\frac{i}{4t})|x|^2}$ *bere hasierako datua izanik* $\omega \in \mathbb{C}$ *batentzako.*

- Goian idatzi dugun ekuazioaren soluzioa hartuz, lehen aipatutako Hardy-ren emaitza berridatz dezakegu honako modu honetan:

Theorem (Hardy)

Baldin $u_0(x) = \mathcal{O}(e^{-\frac{x^2}{\beta^2}})$, $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x) = \mathcal{O}(e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}})$, $t > 0$ *eta* $\alpha\beta < 4t$, *orduan* $u \equiv 0$ *eta* $\alpha\beta = 4t$ *bada orduan* u *soluzioa izango da* $\omega e^{-(\frac{1}{\beta^2}+\frac{i}{4t})|x|^2}$ *bere hasierako datua izanik* $\omega \in \mathbb{C}$ *batentzako.*

- Modu honetako emaitzak gure soluzioaren alderdi kualitatibo bat erakusten dute, baina gure helburua soluzio hori kuantifikatzea izango litzateke

- Hona hemen gure lanaren motibazio den emaitza bat

- Hona hemen gure lanaren motibazio den emaitza bat

Theorem

Izan bedi $u \in \mathcal{C}([0,1] : H^1(\mathbb{R}))$ *ondoko problemaren soluzioa*

$$i\partial_t u + \Delta u + Vu = 0 \quad , \qquad t \in [0,1],\ x \in \mathbb{R}^n$$

Baldin

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^2 + |\nabla_x u|^2)(x,t)dxdt \leq A^2$$

eta

$$\|V\|_{L^\infty} \leq L$$

orduan existitzen da $R_0 = R_0(n, A, L) > 0$ *eta konstante bat* $c = c(n)$ *non* $\forall R \geq R_0$ *hurrengoa betetzen den*

$$\delta(R) = \left(\int_0^1 \int_{[R-1,R]} (|u|^2 + |\nabla_x u|^2)(x,t)dxdt \right)^{1/2} \geq ce^{-cR^2}$$

- Aurreko emaitza hori frogatu ahal izateko ezinbesteko erraminta ondoren daukagun lema hau da:

- Aurreko emaitza hori frogatu ahal izateko ezinbesteko erraminta ondoren daukagun lema hau da:

Lemma (Carleman)

Izan bedi $R > 0$ eta $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ funtzio leun bat. Orduan existitzen da $c = c(n, \|\phi'\|_\infty + \|\phi''\|_\infty) > 0$ non hurrengo desberdintza

$$\frac{\sigma^{3/2}}{R^2} \| e^{\sigma |\frac{x}{R} + \phi(t)|^2} g \|_2 \leq c \| e^{\sigma |\frac{x}{R} + \phi(t)|^2} (i\partial_t + \Delta) g \|_2$$

betetzen den $\sigma \geq cR^2$ eta $g \in \mathcal{C}_0^\infty$ bada eta g horren euskarria ondoko multzoan sartuta badago

$$\{(x,t) : |\frac{x}{R} + \phi(t)| \geq 1\}$$

- Gure helburua Carleman-en estimazioa erabiltzea da lehenago ikusi dugun bezalako emaitza bat lortzeko baina denboraren dependentziarik gabe eta lokalizaturiko espazioko gune batean, hau da

- Gure helburua Carleman-en estimazioa erabiltzea da lehenago ikusi dugun bezalako emaitza bat lortzeko baina denboraren dependentziarik gabe eta lokalizaturiko espazioko gune batean, hau da

$$\int_{[\Lambda,\Lambda+1]} |\hat{u}_0|^2 dx \geq ce^{-c\Lambda^2}$$

non Λ zehaztutako balio bat izango den, nahi bezain handia eta u_0 Schrodingerren problemaren hasierako datua den.

ESKERRIK ASKO ZUEN ARRETAGATIK!